UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
Curso de Nivelación 2014

MATEMÁTICA

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

CURSO DE MATEMÁTICA EN LÍNEA

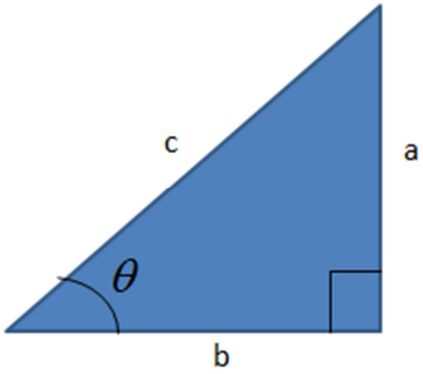
Contenido

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS 1
LEY DE LOS SENOS 6
LEY DEL COSENO 8
RESOLUCIÓN DE LOS TRIÁNGULOS 9
APLICACIONES 11

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Se tiene el siguiente triángulo rectángulo ABC:



$$Sen(\theta c)=\frac{a}{c}\ ,\ Csc(\theta)=\frac{c}{a}$$
$$Cos(\theta)=\frac{b}{c}\ ,\ Sec(\theta)=\frac{c}{b}$$
$$Tan(\theta)=\frac{a}{b}\ ,\ Cot(\theta)=\frac{b}{a}$$

Algunas identidades son:

A. Razones reciprocas

$$Csc(\theta)=\frac{c}{a}$$
$$Csc(\theta)=\frac{c}{a}(1)$$
$$Csc(\theta)=\frac{c}{a}\left(\frac{1/c}{1/c}\right)$$
$$Csc(\theta)=\frac{c/c}{a/c}$$
$$Csc(\theta)=\frac{1}{(a/c)}$$
$$Csc(\theta)=\frac{1}{Sen(\theta)}$$

$$Sec(\theta)=\frac{c}{b}$$
$$Sec(\theta)=\frac{c}{b}\left(\frac{1/c}{1/c}\right)$$
$$Sec(\theta)=\frac{1}{(b/c)}$$
$$Sec(\theta)=\frac{1}{Cos(\theta)}$$

$$Tan(\theta)=\frac{a}{b}$$
$$Tan(\theta)=\frac{a}{b}\left(\frac{1/c}{1/c}\right)$$
$$Tan(\theta)=\frac{(a/c)}{(b/c)}$$
$$Tan(\theta)=\frac{Sen(\theta)}{Cos(\theta)}$$

$$Tan(\theta)=\frac{a}{b}$$
$$Tan(\theta)=\frac{a}{b}\left(\frac{1/a}{1/a}\right)$$
$$Tan(\theta)=\frac{1}{(b/a)}$$
$$Tan(\theta)=\frac{1}{Cot(\theta)}$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$$Cot(\theta)=\frac{b}{a} \qquad Cot(\theta)=\frac{b}{a}$$

$$Cot(\theta)=\frac{b}{a}\left(\frac{1/c}{1/c}\right) \qquad Cot(\theta)=\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{1/b}{1/b}\right)$$

$$Cot(\theta)=\frac{(b/c)}{(a/c)} \qquad Cot(\theta)=\frac{1}{(a/b)}$$

$$Cot(\theta)=\frac{Cos(\theta)}{Sen(\theta)} \qquad Cot(\theta)=\frac{1}{Tan(\theta)}$$

B. Teorema de Pitágoras

$$b^2+a^2=c^2$$

$$\frac{b^2+a^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}$$

$$\frac{b^2}{c^2}+\frac{a^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2=\left(\frac{c}{c}\right)^2$$

$$(Cos(\theta))^2+(Sen(\theta))^2=1 \ , \ (Sen\theta)^2=Sen^2(\theta)$$

$$Sen^2(\theta)+Cos^2(\theta)=1$$

$$\frac{Sen^2(\theta)+Cos^2(\theta)}{Sen^2(\theta)}=\frac{1}{Sen^2(\theta)}$$

$$\frac{Sen^2(\theta)}{Sen^2(\theta)}+\frac{Cos^2\theta}{Sen^2\theta}=\frac{1}{Sen^2\theta}$$

$$1+\left(\frac{Cos(\theta)}{Sen(\theta)}\right)^2=\left(\frac{1}{Sen\theta}\right)^2$$

$$1+(Cot(\theta))^2=(Csc(\theta))^2$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

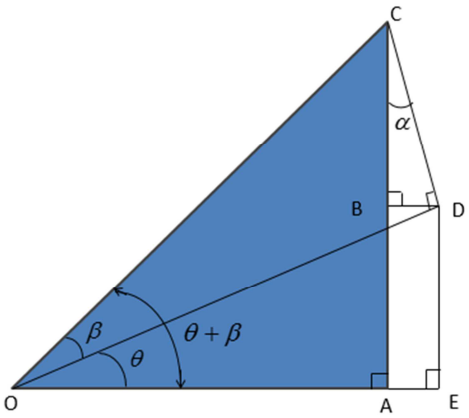
$$\frac{Sen^2(\theta)+Cos^2(\theta)}{Cos^2(\theta)}=\frac{1}{Cos^2(\theta)}$$

$$\frac{Sen^2(\theta)}{Cos^2(\theta)}+\frac{Cos^2(\theta)}{Cos^2(\theta)}=\frac{1}{Cos^2(\theta)}$$

$$\left(\frac{Sen(\theta)}{Cos(\theta)}\right)^2+1=\left(\frac{1}{Cos^2(\theta)}\right)^2$$

$$1+(Tan\theta)^2=(Sec(\theta))^2$$

C. Seno y Coseno de la suma de dos ángulos



$\overline{CD}\perp\overline{OD}$

$\overline{CB}\perp\overline{OE}$

$\alpha=\theta$

$\overline{BA}=\overline{DE}$

$\overline{AE}=\overline{BD}$

$$Sen(\theta+\beta)=\frac{\overline{AC}}{\overline{OC}}$$

$$Sen(\theta+\beta)=\frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{OC}}$$

$$Sen(\theta+\beta)=\frac{\overline{DE}+\overline{BC}}{\overline{OC}}$$

$$Sen(\theta+\beta)=\frac{\overline{DE}}{\overline{OC}}+\frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}$$

$$Sen(\theta+\beta)=\frac{\overline{DE}}{\overline{OC}}.\frac{\overline{OD}}{\overline{OD}}+\frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}.\frac{\overline{DC}}{\overline{DC}}$$

$$Sen(\theta+\beta)=\frac{\overline{DE}}{\overline{OD}}.\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}+\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}.\frac{\overline{DC}}{\overline{OC}}$$

$$Sen(\theta+\beta)=Sen(\theta).Cos(\beta)+Cos(\alpha)Sen(\beta)$$

$$Sen(\theta+\beta)=Sen(\theta).Cos(\beta)+Sen(\beta)Cos(\alpha)$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$$Cos(\theta+\beta)=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$$

$$Cos(\theta+\beta)=\frac{\overline{OE}-\overline{AE}}{\overline{OC}}$$

$$Cos(\theta+\beta)=\frac{\overline{OE}-\overline{BD}}{\overline{OC}}$$

$$Cos(\theta+\beta)=\frac{\overline{OE}}{\overline{OC}}-\frac{\overline{BD}}{\overline{OC}}$$

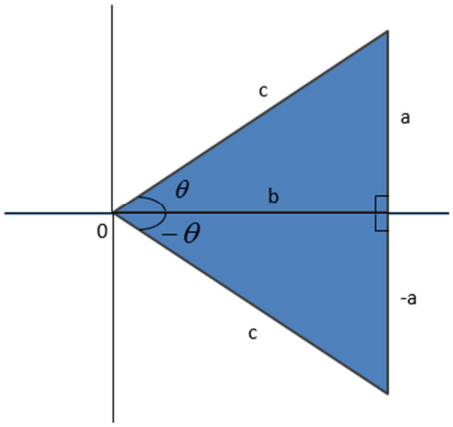
$$Cos(\theta+\beta)=\frac{\overline{OE}}{\overline{OC}}\cdot\frac{\overline{OD}}{\overline{OD}}-\frac{\overline{BD}}{\overline{OC}}\cdot\frac{\overline{DC}}{\overline{DC}}$$

$$Cos(\theta+\beta)=\frac{\overline{OE}}{\overline{OD}}\cdot\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}-\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{DC}}{\overline{OC}}$$

$$Cos(\theta+\beta)=Cos(\theta)Cos(\beta)-Sen(\alpha)Sen(\beta)$$

$$Cos(\theta+\beta)=Cos(\theta)Cos(\beta)-Sen(\theta)Sen(\beta)$$

D. Razones de un ángulo negativo $(-\theta)$



$$Sen(-\theta)=\frac{-a}{c}\rightarrow Sen(-\theta)=-(\frac{a}{c})$$

$$Sen(-\theta)=-Sen(\theta)$$

$$Cos(-\theta)=\frac{b}{c}\rightarrow Cos(-\theta)=Cos(\theta)$$

$$Tan(-\theta)=\frac{-a}{b}\rightarrow Tan(-\theta)=-(\frac{a}{b})$$

$$Tan(-\theta)=-Tan(\theta)$$

$$Csc(-\theta)=\frac{c}{a}\Rightarrow Csc(-\theta)=-(\frac{c}{a})$$

$$Csc(-\theta)=-Csc(\theta)$$

$$Sec(-\theta)=\frac{c}{b}\rightarrow Sec(-\theta)=Sec(\theta)$$

$$Cot(-\theta)=\frac{b}{-a}\Rightarrow Cot(-\theta)=-(b/a)$$

$$Cot(-\theta)=-Cot(\theta)$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

E. Seno y Coseno de la diferencia de dos ángulos

De 10 , Si $\theta = A$ y $\beta = -B$

$$Sen(\theta+\beta) = Sen(\theta)Cos(\beta) + Sen(\beta)Cos(\theta)$$
$$Sen(A+(-B)) = Sen(A)Cos(-B) + Sen(-B)Cos(A)$$
$$Sen(A-B) = Sen(A)Cos(B) - Sen(B)Cos(A)$$

De 11 , Si $\theta = A$ y $\beta = -B$

$$Cos(\theta+\beta) = Cos(\theta)Cos(\beta) - Sen(\theta)Sen(\beta)$$
$$Cos(A+(-B)) = Cos(A)Cos(-B) - Sen(A)Sen(-B)$$
$$Cos(A-B) = Cos(A)Cos(B) + Sen(A)Sen(B)$$

F. Seno y Coseno del ángulo doble

De 10 , Si $\theta = \beta$

$$Sen(\theta+\beta) = Sen(\theta)Cos(\beta) + Sen(\beta)Cos(\theta)$$
$$Sen(\theta+\theta) = Sen(\theta)Cos(\theta) + Sen(\theta)Cos(\theta)$$
$$Sen(2\theta) = 2Sen(\theta)Cos(\theta)$$

De 11 , Si $\theta = \beta$

$$Cos(\theta+\beta) = Cos(\theta)Cos(\beta) - Sen(\theta)Sen(\beta)$$
$$Cos(\theta+\theta) = Cos(\theta)Cos(\theta) - Sen(\theta)Sen(\theta)$$
$$Cos(2\theta) = (Cos\theta)^2 - (Sen\theta)^2$$

Sustituyendo $Cos^2\theta = 1 - Sen^2\theta$ en 21

$$Cos(2\theta) = (1 - Sen^2\theta) - Sen^2\theta$$
$$= 1 - 2Sen^2\theta$$
$$Sen^2(\theta) = \frac{1 - Cos(2\theta)}{2}$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Sustituyendo $Sen^2\theta = 1 - Cos^2\theta$ en 21

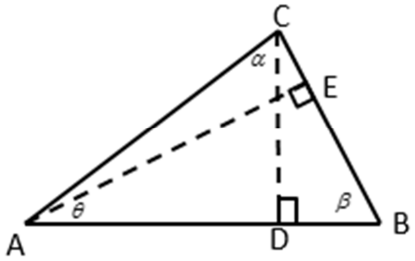
$$Cos(2\theta) = Cos^2(\theta) - (1 - Cos^2\theta)$$

$$Cos(2\theta) = 2Cos^2(\theta) - 1$$

$$Cos^2(\theta) = \frac{1 + Cos(2\theta)}{2}$$

LEY DE LOS SENOS

Se tiene el siguiente triángulo ABC



$\overline{DC}$ = ALTURA

$\overline{AE}$ = ALTURA

1) $\cos\theta = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{DC} = \overline{AC}sen\theta$

2) $sen\beta = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{DC} = \overline{BC}sen\beta$

de 1) y 2)

$\overline{AC}sen\theta = \overline{BC}sen\beta$

$\dfrac{sen\theta}{\overline{BC}} = \dfrac{sen\beta}{\overline{AC}} \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ m)

"El seno del ángulo θ es a su lado opuesto $\left(\overline{BC}\right)$ como el seno del ángulo β es a su lado opuesto $\left(\overline{AC}\right)$"

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

3) $\cos\theta = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{AE} = \overline{AC}sen\alpha$

4) $sen\beta = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AE} = \overline{AB}sen\beta$

de 3) y 4)

$\overline{AC}sen\alpha = \overline{AB}sen\beta$

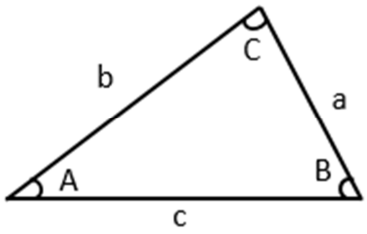
$\dfrac{sen\alpha}{\overline{AB}} = \dfrac{sen\beta}{\overline{AC}} \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ n)

"El seno del ángulo α es a su lado opuesto $\left(\overline{AB}\right)$ como el seno del ángulo β es a su lado opuesto $\left(\overline{AC}\right)$"

De m) y n)

$$\frac{sen\theta}{\overline{BC}} = \frac{sen\beta}{\overline{AC}} = \frac{sen\alpha}{C}$$

Resumiendo:



$\dfrac{senA}{a} = \dfrac{senB}{b} = \dfrac{senC}{c} \rightarrow$ Ley de los senos

A + B + C = 180°

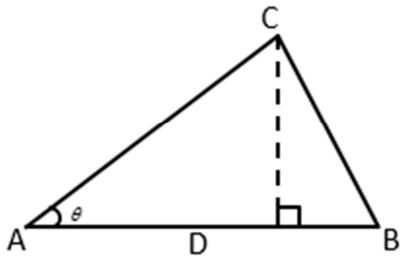
En todo triángulo al mayor lado se opone el mayor ángulo.

La ley de los senos se aplica cuando conocemos dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos o cuando conocemos dos ángulos y un lado.

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

LEY DEL COSENO

Se tiene le siguiente triángulo ABC



$\overline{AC}, \overline{AB}$ y θ son conocidos

$\overline{CD}$: ALTURA

$$\left(\overline{DC}\right)^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 - \left(\overline{AD}\right)^2 \qquad 1)$$

$$\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{DC}\right)^2 + \left(\overline{BD}\right)^2 \qquad 2)$$

Sustituyendo 1) en 2)

$$\left(\overline{BC}\right) = \left(\left(\overline{AC}\right)^2 - \left(\overline{BD}\right)^2\right) + \left(\overline{BD}\right)^2 \qquad 3)$$

$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} \qquad 4)$$

Sustituyendo 4) en 3)

$$\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 - \left(\overline{AD}\right)^2 + \left(\left(\overline{AB}\right)^2 - \left(\overline{AD}\right)^2\right)$$

$$\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 - \left(\overline{AD}\right)^2 + \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{AD}\right)^2 - 2\left(\overline{AB}\right)\left(\overline{AD}\right)$$

$$\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 + \left(\overline{AB}\right)^2 - 2\left(\overline{AB}\right)\left(\overline{AD}\right) \qquad 5)$$

$$\cos\theta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \quad \rightarrow \quad \overline{AD} = \overline{AC}\cos\theta \qquad 6)$$

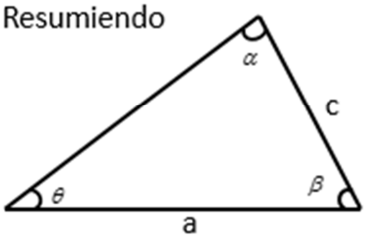
sustituyendo 6) y 5)

$$\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 + \left(\overline{AB}\right)^2 - 2\left(\overline{AB}\right)\left(\overline{AC}\right)\cos\theta$$

"El cuadro del lado de un triángulo $\left(\overline{BC}\right)$ es igual al cuadrado del otro lado $\left(\overline{AC}\right)$ más el cuadrado del otro lado $\left(\overline{AB}\right)$ menos el doble del producto de ambos lados, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, por el coseno del ángulo que ellos forman $\left(\theta\right)$"

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Resumiendo



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ ó

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Esta ley del coseno se aplica cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido o cuando se conocen los tres lados.

RESOLUCIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

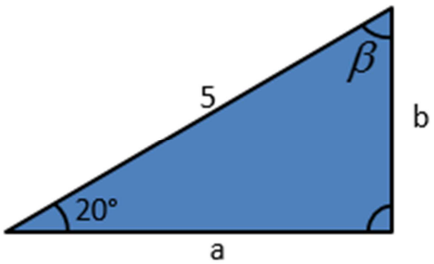
Resolver un triángulo es calcular los lados y ángulos desconocidos. Se puede resolver un triángulo cuando se conocen:

a) los lados

b) un lado y dos ángulos

c) dos lados y un ángulo

Ejemplo: Resolver el triángulo



Solución

$\text{sen}20° = \frac{b}{5} \rightarrow b = 5\text{sen}20° \cong 1.71$

$\cos 20° = \frac{a}{5} \rightarrow a = 5\cos 20° \cong 4.70$

$20° + \beta = 90° \rightarrow \beta = 90° - 20° \rightarrow \beta = 70°$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

2)

Solución

$25^2 = 28^2 + 17^2 - 2(28)(17)\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{28^2 + 17^2 - 25^2}{2(28)(17)} \rightarrow \theta \cong 61.93°$

$17^2 = 28^2 + 25^2 - 2(28)(25)\cos\beta$

$\cos\beta = \dfrac{28^2 + 25^2 - 17^2}{2(28)(25)} \rightarrow \beta = 36.87°$

$28^2 = 17^2 + 25^2 - 2(17)(25)\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{17^2 + 25^2 - 28^2}{2(17)(25)} \rightarrow \alpha = 81.20$

$\theta + \beta + \alpha = 61.93° + 36.87° + 81.20°$

$= 180°$

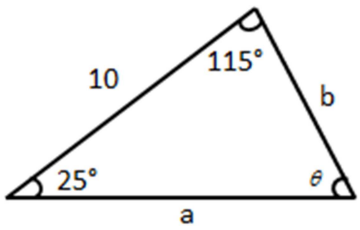
Además el lado mayor se opone al ángulo mayor.

Lado de 28 opuesto a α=81.20°

Lado de 25 opuesto a θ=61.93°

Lado de 17 opuesto a β=36.87°

3)



Solución

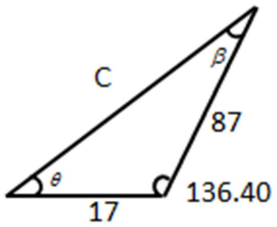
$\theta + 25° + 115° = 180° \rightarrow \theta = 40°$

$\dfrac{sen25°}{b} = \dfrac{sen40°}{10} \rightarrow b = \dfrac{10sen25°}{sen40°} = 6.57$

$\dfrac{sen115°}{a} = \dfrac{sen40°}{10} \rightarrow a = \dfrac{10sen115°}{sen40°} = 14.10$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

4)



Solución

$c^2 = 17^2 + 87^2 - 2(17)(87)\cos 136.40°$

$c = 100.00$

$\frac{sen136.40°}{100.00} = \frac{sen\beta}{17} \rightarrow \text{sen}\beta = \frac{17 sen136.40°}{100.00}$

$\beta = 6.73°$

$\theta + 136.40° + 6.73° = 180° \rightarrow \theta = 36.87°$

APLICACIONES

Ejercicios. Deducir una fórmula para:

1) $Tan(\theta + \beta)$

2) $Sen(3\theta)$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Solución:

1)

$$Tan(\theta+\beta)=\frac{Sen(\theta+\beta)}{Cos(\theta+\beta)}$$

$$=\frac{Sen(\theta)Cos(\beta)+Sen(\beta)Cos(\theta)}{Cos(\theta)Cos(\beta)-Sen(\theta)Sen(\beta)}$$

$$=\frac{\dfrac{Sen(\theta)Cos(\beta)+Sen(\beta)Cos(\theta)}{Cos(\theta)Cos(\beta)}}{\dfrac{Cos(\theta)Cos(\beta)-Sen(\theta)Sen(\beta)}{Cos(\theta)Cos(\beta)}}$$

$$=\frac{\dfrac{Sen(\theta)Cos(\beta)}{Cos\theta Cos\beta}+\dfrac{Sen(\theta)Cos(\beta)}{Cos\theta Cos\beta}}{\dfrac{Cos\theta Cos\beta}{Cos\theta Cos\beta}+\dfrac{Sen\theta Sen\beta}{Cos\theta Cos\beta}}$$

$$Tan(\theta+\beta)=\frac{Tan(\theta)+Tan(\beta)}{1-Tan(\theta)Tan(\beta)}$$

2)

$$Sen(3\theta)=Sen(2\theta+\theta)$$

$$Sen(3\theta)=Sen(2\theta)Cos(\theta)+Sen(\theta)Cos(2\theta)$$

$$Sen(3\theta)=(2Sen(\theta)Cos(\theta))+Sen(\theta)(Cos^2\theta-Sen^2\theta)$$

$$Sen(3\theta)=2Sen(\theta)(Cos(\theta))^2+Sen(\theta)((1-Sen^2\theta)-Sen^2\theta)$$

$$Sen(3\theta)=2Sen(\theta)(1-Sen^2\theta)+Sen(\theta)(1-2Sen^2\theta)$$

$$Sen(3\theta)=2Sen(\theta)-2Sen^3(\theta)+Sen(\theta)-2Sen^3\theta$$

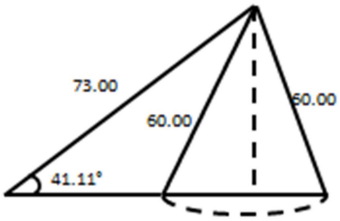
$$Sen(3\theta)=3Sen(\theta)-4Sen^3\theta$$

Ejercicios: Resolución de triángulos

1) Resolver el triángulo donde un lado mide 60.00 cm y el ángulo opuesto mide 41.11°, y el otro lado mide 73.00 cm

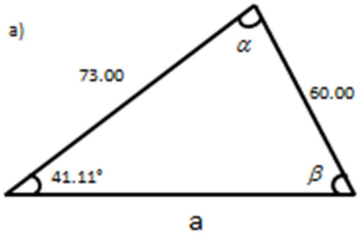
Solución

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013



Siempre que se conozcan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos sea agudo se tendrán dos soluciones.

a)



Solución

$$\frac{sen41.11°}{60.00}=\frac{sen\beta}{73.00}\rightarrow sen\beta=\frac{\infty 73.00sen41.11°}{60.00}$$

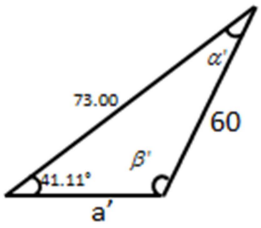
$$\beta=53.13°$$

$$41.11°+53.13°+\alpha=180°\rightarrow\alpha=85.76°$$

$$\frac{sen41.11°}{60.00}=\frac{sen85.76°}{a}\rightarrow\frac{60.00sen85.76°}{sen41.11°}$$

$$a=91.00cm$$

b)



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Solución

$$\frac{sen41.11°}{60.00}=\frac{sen\beta'}{73.00}\rightarrow sen\beta'=\frac{73.00sen41.11°}{60.00}$$

$$\beta=53.13°$$

Observe que β' no puede medir 5.13° ya que es el opuestoa lado 73.00

entonces:

$$\beta'=180°-53.13°\rightarrow 126.87°$$

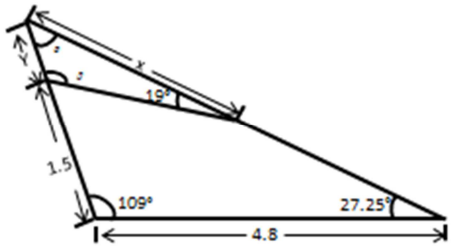
$$41.11°+126.87°+\alpha'=180°\rightarrow\alpha'=12.02°$$

$$41.11°+53.13°+\alpha=180°\rightarrow\alpha=85.76°$$

$$\frac{sen12.02°}{a'}=\frac{sen126.87°}{73.00}\rightarrow a'=\frac{73.00sen12.02°}{sen126.87°}$$

$$a'=19.00cm$$

2) Calcular el valor de X



Solución

$$109°+27.25°+\theta=180°\rightarrow\theta=43.75°$$

$$43.75°+\beta+19°=180°\rightarrow\beta=117.25°$$

$$\frac{sen27.25°}{15.+y}=\frac{sen43.75°}{4.8}\rightarrow y=1.68$$

$$\frac{sen19°}{1.68}=\frac{sen117.25°}{x}\rightarrow x=4.59°$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013